



TITLE:

# D. H. Fremlin の定理と周辺(コホモロジー次元とソフト写像の研究)

AUTHOR(S):

大田, 春外

---

CITATION:

大田, 春外. D. H. Fremlin の定理と周辺(コホモロジー次元とソフト写像の研究). 数理解析研究所講究録 1989, 711: 14-21

ISSUE DATE:

1989-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101689>

RIGHT:

## D. H. Fremlin の定理と周辺

静岡大・教育 大田 春外 (Haruto Ohta)

1. 我々の問題. 位相空間  $X$  は, 任意の zero-sets の和集合の閉包がまた zero-set になるという性質を持つとき, Klebanov 空間と呼ばれる。例えば, 完全正規空間, 距離空間の任意積 ([7]), compact  $\kappa$ -metric 空間 ([13]) など Klebanov 空間である。この空間に関する我々 (= 玉野研一, 酒井政美, 森下和彦さんと私) の研究の中で, 次の問題が起った。「Klebanov 空間の稠密な部分空間はまた Klebanov 空間か?」 この問題は, 1989 夏のサマー・セミナーで発表された様に, 酒井政美さん [9] によって否定的に解決されたが, 私もまた D. H. Fremlin の論文 [4] の中に, 否定解を見つけた。そこで, その内容と周辺の問題を述べる。

2. Fremlin の定理. 集合  $X$  に対して,

$$\ell^1(X) = \{ x \in \mathbb{R}^X : \sum_{t \in X} |x(t)| < +\infty \}$$

とする。  $\ell^1(X)$  はノルム  $\|x\| = \sum_{t \in X} |x(t)|$  によって Banach

空間である。いま、この Banach 空間  $E$  ( $\mathcal{Q}'(X)$ , norm) を表わし、弱位相を与えた  $\mathcal{Q}'(X)$  ( $\mathcal{Q}'(X)$ , weak) とかく。また空間  $E$  に対し、 $Bo(E)$  ( $Ba(E)$ ) は、 $E$  の Borel 集合 (Baire 集合) 全体から成る  $\sigma$ -algebra を表わす。他方、 $P(X)$  は  $X$  の巾集合を表わし、 $P(X) \otimes P(X)$  は  $\{A \times B : A, B \in P(X)\}$  から生成される  $\sigma$ -algebra を表わす。さて、D. H. Fremlin は [4] で 次の定理を証明した。

D. H. Fremlin の定理 (F). 無限集合  $X$  に対し、次の 2 つの等式 (a), (b) は互いに同値である。

$$a) \quad P(X \times X) = P(X) \otimes P(X),$$

$$b) \quad Bo(\mathcal{Q}'(X), \text{norm}) = Ba(\mathcal{Q}'(X), \text{weak}).$$

なぜ、この結果が、我々の問題に否定解を与えるかを述べるためには、次の B. V. Rao [11] の結果が必要である。

B. V. Rao の定理 (R).  $|X| = \omega_1$  ならば、 $P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$  が成立する。

定理 (F) と (R) から、 $|X| = \omega_1$  である集合  $X$  に対して、

$$Bo(\mathcal{Q}'(X), \text{norm}) = Ba(\mathcal{Q}'(X), \text{weak}) \quad (1)$$

が成立する。また  $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  は正規空間でない。これは H. H. Corson [2] の次の結果から導びかれる: もし、 $(E, \text{weak})^2$  が discrete な非可算閉集合を含めば、 $(E, \text{weak})$  は正規ではない。実際、各  $t \in X$  に対し

$$x_t(t') = \begin{cases} 1 & \text{if } t' = t, \\ 0 & \text{if } t' \neq t. \end{cases}$$

とすれば、 $\{x_t : t \in X\}$  は  $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak}) \approx (\mathcal{Q}'(X), \text{weak})^2$  の discrete な非可算閉集合である。結果として、 $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  は zero-set ではない閉集合  $F$  をもつ。ところで、(1) より  $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  の各点  $x$  は zero-set であり、 $F$  は zero-sets の和として表わされる。従って、 $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  は Klebanov 空間でない。一方、弱位相の性質から、 $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  は実数空間  $\mathbb{R}$  の直積、即ち Klebanov 空間、に稠密に埋蔵される。

3. 等式  $B_0(\mathcal{Q}'(X), \text{norm}) = B_0(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  の周辺。  
一般に、Banach 空間  $E$  に対し、次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} B_0(E, \text{norm}) & \supseteq & B_0(E, \text{weak}) & \supseteq & B_0(E, \text{weak}) \\ \parallel & & (a) & & (b) \\ B_0(E, \text{norm}) & & & & \end{array}$$

$(E, \text{norm})$  が separable の場合、(a) と (b) は等号である。

成せらる  $(E, \text{weak})$  は, このとき cosmic 空間だから, (b) は等号である。更に, その可算 net として  $(E, \text{norm})$  の closed balls から成るものを選び, Alaoglu の定理から, 各 closed ball は  $(E, \text{weak})$  でも閉集合である。これらのことから, (a) も等号になる。そもそも, 定理 (F) は  $E$  が norm-separable でない場合にも, (a)(b) が等号になり得ることを示すために証明された。norm-separability を弱めて,  $E$  は WCG Banach 空間とすると, (a) は等号であるが (b) の等号は保証されない (G. A. Edgar [3])。一方,  $E = \ell^\infty$  に対しては, (a)(b) は共に等号ではない (M. Talagrand [14])。ところが次の問題は十分に答えられていない。

問題 1 (D. H. Fremlin)。どの様な場合に, (b) は等号になるか?

一般の位相空間  $X$  に対しても, 等式

$$B_0(X) = B_a(X) \quad (2)$$

が成り立つための条件は, 殆んど研究されていない。  $X$  が完全正規ならば (2) は成り立つが, 逆に (2) から  $X$  の完全正規性が導びかれるかどうかは, M. Katětov [5] の古典的

な問題である。今のところ、二の問題に対する反例は、上で述べた  $(\mathcal{Q}'(X), \text{weak})$  だけの様である。そこで、次の問題が起る。

問題 2. 完全正規でない位相空間  $X$  で、 $B_0(X) = B_a(X)$  とする他の例を与えよ。

弱位相を持つ Banach 空間について述べたが、点ごと収束の位相を持つ関数空間  $C_p(X)$  の Borel 集合と Baire 集合の間には、どのような関係があるか。  $C_p(X)$  に興味を持つ人は考えてみると面白いかも知れない。例えば、問題 2 の答は  $C_p(X)$  を使って与えられるか。

4. 等式  $P(X \times X) = P(X) \otimes P(X)$  の周辺。 B. V. Rao の定理 (R) から、 $|X| = \omega_1$  のとき この等式は成立するが、 $|X| > 2^\omega$  のときは成立しない ([12])。 CH を否定したとき、 $\omega_1 < |X| \leq 2^\omega$  である  $X$  に対し、いつこの等式が成立するかは集合論の問題である (例えば、A. W. Miller [8] を見よ)。ここでは、 $B_a(X) \otimes B_a(Y) \subseteq \{A \times B : A \in B_a(X), B \in B_a(Y)\}$  から生成される  $\sigma$ -algebra として、等式

$$B_a(X \times Y) = B_a(X) \otimes B_a(Y) \quad (3)$$

が成立するための条件について述べる。(3)が成立するための次の様な十分条件が知られている。

- (a)  $X \times Y$  は pseudo-compact ([1]),
- (b)  $X \times Y$  は Lindelöf ([1], [6]),
- (c)  $X$  は 局所 compact,  $\sigma$ -compact で,  $Y$  は separable ([6]),
- (d)  $X$  は separable 距離空間, 又はより一般に, cosmic 空間 ([1], [6]).

次の問題は未解決である。

問題 3 (H. G. Kellerer [6]).  $X \times Y$  が separable ならば, (3) は成立するか?

以上の結果と問題は, いずれも  $X, Y$  にある種の可算性を要求している。しかし 定理(R) によれば,  $|X| = \omega_1$  である離散空間  $X$  の直積  $X \times X$  に対しても (3) は成り立つ。そこで次の問題が起る。

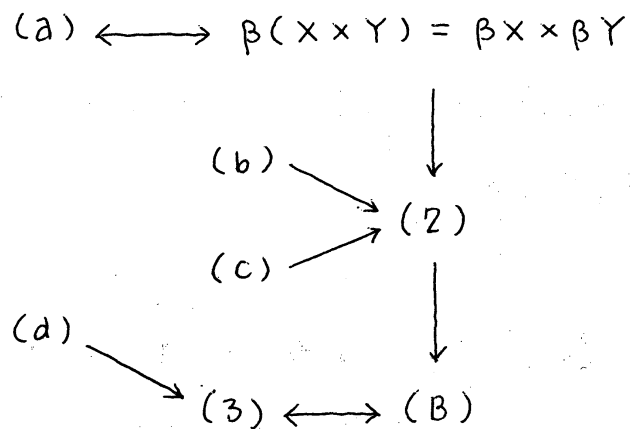
問題 4. 定理(R) を含むより, (3) に対する十分条件を与えよ。

位相空間  $X$  の部分空間  $Y$  の任意の Baire 集合 (zero-set)  $B$  に対し,  $A \cap Y = B$  とする  $X$  の Baire 集合 (zero-set)  $A$  が存在するとき,  $Y$  は  $X$  で Baire-embedded (z-embedded) であるという。いま, 条件

(Z)  $X \times Y$  は  $\beta X \times \beta Y$  で z-embedded,

(B)  $X \times Y$  は  $\beta X \times \beta Y$  で Baire-embedded,

を考へる。このとき, 上に挙げた十分条件 (a)-(d) と等式 (3) の間には, 次の様な関係がある:



$|X| = \omega_1$  である離散空間  $X$  は  $(Z) \rightarrow (B)$  の逆が成立し得ることを示す。また  $(Z)$  をみたさ得る様な, separable 距離空間  $X$  と separable 空間  $Y$  の例を与えることも出来る ([10]).  $(3)$  で Baire 集合を Borel 集合に変えた等式については, 殆んど何も知らされてゐない様である。



## 参考文献

1. A. G. Babiker and J. D. Knowles, Functions and measures on product spaces, *Mathematika*, 32 (1985), 60-67.
2. H. H. Corson, The weak topology of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101 (1961), 1-15.
3. G. A. Edger, Measurability in a Banach space I, II, *Indiana Univ. Math. J.*, 26 (1977), 663-677; 28 (1979), 559-579.
4. D. H. Fremlin, Borel sets in non-separable Banach spaces, *Hokkaido Math. J.*, 9 (1980), 179-183.
5. M. Katětov, Measures in fully normal spaces, *Fund. Math.*, 38 (1951), 73-84.
6. H. G. Kellerer, Baire sets in product spaces, *Springer Lecture Notes* 794 (1980), 38-44.
7. B. S. Klebanov, Remarks on subsets of cartesian products of metric spaces, *Comment. Math. Univ. Carolina*, 23:4 (1982), 769-784.
8. A. W. Miller, On the length of Borel hierarchies, *Ann. Math. Logic*, 16 (1979), 233-267.
9. K. Morishita and M. Sakai, 実数空間の Klebanov 性 in preparation.
10. H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, to appear in *Topology Appl.*
11. B. V. Rao, On discrete Borel spaces and projective sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 614-617.
12. ———, On discrete Borel spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 22 (1971), 197-198.
13. E. V. Ščepin, On  $\kappa$ -metrizable spaces, *Math. USSR Izvestija*, 14 (1980), 407-440.
14. M. Talagrand, Comparaison des Boreliens d'un espace de Banach pour les topologies fortes et faibles, *Indiana Univ. Math. J.*, 27 (1978), 1001-1004.